

Παράδειγμα

Ο $(C(A, \mathbb{R}), p_u)$ είναι μέτρος f X .

Ανάλυση

Επίσης $(C(A, \mathbb{R}), p_u)$ είναι κλειστά υποσύνολο του μέτρου $(F(A, \mathbb{R}), p_u)$ έπειτα ότι είναι μέτρος

Παράδειγμα

Έστω $(f_n) \subseteq C(A, \mathbb{R}) : f_n \rightarrow f$ (στ/με) για κάποια $f \in F(A, \mathbb{R})$
 τότε $\forall \alpha \in A$ και κάθε ακολουθία $(x_n) \subseteq A$ με $x_n \rightarrow \alpha$
 ισχύει $\lim f_n(x_n) = f(\alpha)$

Ανάλυση

Η (f_n) είναι ακολουθία συνεχών συναρτήσεων και $f_n \rightarrow f$ (στ/με)
 εφόσον η f είναι συνεχής στο A .

Επίσης, λοιπόν, $x_n \rightarrow \alpha \in A$ έπειτα ότι $\lim f(x_n) = f(\alpha)$
 (ορίστε από προηγ. πρόταση) και το $\lim f_n(x_n)$ θα υπάρχει
 και τελικά $\lim f_n(x_n) = f(\alpha)$

Κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης

Έστω $(f_n) \subseteq C(A, \mathbb{R}) : \text{για κάποιο } \alpha \in A \text{ να υπάρχουν δύο}$
 ακολουθίες (x_n) και $(y_n) : \lim x_n = \alpha = \lim y_n$ και
 $\lim f_n(x_n) \neq \lim f_n(y_n)$. τότε η ακολουθία (f_n) δε συγκλίνει ομοιόμορφα

Άσκηση

Έστω $f_n(x) = v^2 x (1 - 4x)^{2v}$, $v \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Να εξετάσετε
 την (f_n) ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση.

Λύση

$\forall v \in \mathbb{N}$ f_n είναι συνεχής

Επίσης $f_n(0) = 0 \forall n$ άρα $f_n(0) \rightarrow 0$

Εάν υπήρχε $f : f_n \rightarrow f$ (στ/με) τότε $f(0) = 0$

Έστω $x_n = \frac{1}{v}$, $x_n \rightarrow 0$ και

$f_n(x_n) = v^2 \frac{1}{v} (1 - \frac{4}{v})^{2v} = v (1 - \frac{4}{v})^{2v} \rightarrow +\infty$ γιατί $(1 - \frac{4}{2v})^{2v} \rightarrow e^{-4}$

Άρα η (f_n) ΔΕΝ συγκλίνει ομοιόμορφα
 σε κάποια f

Λίστα

Εστω $f_v(x) = \begin{cases} 1 & , x < \frac{1}{v+1} \text{ ή } x > \frac{1}{v} \\ \cos^2 \frac{\pi}{x} & , \frac{1}{v+1} \leq x \leq \frac{1}{v} \end{cases}$

Να εξετάσετε αν η (f_v) συγκλίνει ομοιόμορφα

Λύση

$f_1(x) = \begin{cases} 1 & , x < \frac{1}{2} \text{ ή } x > 1 \\ \cos^2 \frac{\pi}{x} & , \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$

$f_2(x) = \begin{cases} 1 & , x < \frac{1}{3} \text{ ή } x > \frac{1}{2} \\ \cos^2 \frac{\pi}{x} & , \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{v+1}^+} f_v(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{v+1}^+} \cos^2 \frac{\pi}{x} = \cos^2(\pi(v+1)) = [(-1)^{v+1}]^2 = 1 = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{v+1}^-} f_v(x)$

Άρα f_v συνεχής στο $x = \frac{1}{v+1}$

Όμοια συνεχής και στο $x = \frac{1}{v}$

Άρα (f_v) ακολουθεί συνεχήν συναρτήσεων

$f_v(0) = 1 \quad \forall v \in \mathbb{N}$ οπότε $f_v(0) \rightarrow 1$

Εάν υπήρχε $f: f_v \rightarrow f$ ο/πε τότε $f(0) = 1$

Εστω $x_v = \frac{\frac{1}{v+1} + \frac{1}{v}}{2} = \frac{v + (v+1)}{2v(v+1)} = \frac{2v+1}{2v(v+1)} \rightarrow 0$

Τότε $f_v(x_v) = \cos^2 \frac{\pi}{x_v} = \cos^2 \left[\pi \frac{2v(v+1)}{2v+1} \right] = \cos^2 \left((v+1)\pi - \pi \frac{v+1}{2v+1} \right)$

• Εάν v : περιττός : $f_v(x_v) = \cos^2 \left(\pi \frac{v+1}{2v+1} \right)$

• Εάν v : άρτιος : $f_v(x_v) = - \left[\cos \left(\pi \frac{v+1}{2v+1} \right) \right]^2$

$f_v(x_v) = \cos^2 \left(\pi \frac{v+1}{2v+1} \right)$ οπότε $f_v(x_v) \rightarrow \cos^2 \frac{\pi}{2} = 0 \neq 1$ ο/πε
η (f_v) ΔΕΝ συγκλίνει ο/πε

Άσκηση

Θεωρούμε την ακολουθία $f_n(x) = n \cdot x(1-x)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$
Να εξετάσουμε ως προς την ομοιότητα σύμπτωσης

Λύση

Για $n \in \mathbb{N}$ η f_n είναι συνεχής στο $[0,1]$
Επίσης, έστω $x_n = \frac{1}{n}$ και $y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ τότε
 $x_n \rightarrow 0$ και $y_n \rightarrow 0$ ο.ε.α. $\nrightarrow$

$$f_n(x_n) = n \cdot \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e^{-1} \neq 0$$

$$f_n(y_n) = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \rightarrow 0 \cdot e^{-1} \cdot e = 0$$

$$\text{Επειδή, } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = e^{-1} \neq 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y_n),$$

η σύμπτωση ΔΕΝ είναι ομοιότητα

Άσκηση

Έστω $f_n(x) = n x^n (1-x)$, $x \in [0,1]$

Να εξετάσουμε ως προς την ομοιότητα σύμπτωσης

Λύση

• Για $x=0$ έχουμε: $f_n(0)=0$

• Για $x=1$ έχουμε: $f_n(1)=0$

• Εάν $x \in (0,1)$ τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot x^n = 0$ γιατί:

Θεωρούμε $a_n = n x^n$ και έστω

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)x^{n+1}}{n x^n} = \frac{n+1}{n} x \text{ και } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| = x < 1$$

έστω $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Οπότε για $x \in (0,1)$: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ οπότε $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$ όπου

Παρατηρούμε ότι η (f_n) εκάστως

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

συνεχών συναρτήσεων έχει κατ'ελάχιστον όριο μια συνεχή συνάρτηση. Όμως, η σύμπτωση ΔΕΝ είναι ομοιότητα διότι:

Έστω $x_n = 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1$ και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} \right] \rightarrow e^{-1} \neq 0 = f(1)$$

Άρα η σύμπτωση ΔΕΝ είναι ομοιότητα

Υπόδειξη

- 1) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές $\Leftrightarrow$ είναι κλειστό και φραγμένο
- 2) Γενικά σε τ.χ. η έννοια της συμπαγείας ταυτίζεται με την έννοια της ακολουθιακής συμπαγείας
- 3) Εάν $A \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές και f συνεχής τότε $f(A)$ συμπαγές
- 4) Εάν $A \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές και f συνεχής τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A .
- 5) Εάν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και $A \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές τότε $f(A)$ φραγμένο οπότε $C(A, \mathbb{R}) \subseteq B(A, \mathbb{R})$

Πρόταση

Αν $A \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές και f_n μονότονη ακολουθία (δηλ. ή $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A$ ή $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A$) και $(f_n) \in C(A, \mathbb{R}) : f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$ όπου $f \in C(A, \mathbb{R})$ τότε $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα

Απόδειξη

Έστω $q_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$, $\forall n \in \mathbb{N}, x \in A$ τότε

i) Εάν (f_n) είναι $\uparrow$ (δηλ. $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A$) έχω:

$$q_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = f(x) - f_n(x) \text{ έρε } (q_n): \downarrow \text{ (γιατί } -f_n: \downarrow)$$

ii) Εάν (f_n) είναι $\downarrow$ (δηλ. $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A$) έχω:

$$q_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = f_n(x) - f(x) \text{ συνεπώς}$$

$(q_n): \downarrow$ (εφ'όσον $(f_n): \downarrow$). Άρα η $(q_n): \downarrow$ σε κάθε περίπτωση

Επιπλέον, $\forall n \in \mathbb{N} : q_n(x) \geq 0 \quad \forall x \in A$ και

q_n : συνεχής (διότι f_n και f συνεχείς).

Επιπλέον, εφόσον η $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$ έπεται ότι η $q_n \xrightarrow{κ.σ.} 0$.

Έστω $\varepsilon > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ορίσате $A_n = \{x \in A : q_n(x) < \varepsilon\} = q_n^{-1}(-\infty, \varepsilon)$

Άρα λόγω του ότι $(-\infty, \varepsilon)$ ανοικτό και q_n συνεχής έπεται ότι

A_n : ανοικτό υποσύνολο του A (ως αντιστροφή εικόνα ανοικτού [όπου η μέγιστη q_n^{-1} της μέγιστης q_n^{-1}])

Έστω $x \in A$. Εφόσον, $q_n \xrightarrow{κ.σ.} 0$ στο A

θα το παραβλέψω ε , $\exists v_0 = v_0(\varepsilon, x) : |q_n(x) - 0| < \varepsilon \quad \forall n \geq v_0$

ή $q_n(x) < \varepsilon \quad \forall n \geq v_0$ ή $x \in q_n^{-1}(-\infty, \varepsilon) = A_n \quad \forall n \geq v_0$.

Άρα $\forall x \in A$ έχω ότι x ανήκει ταλάνιστον σε ένα $A_n \Rightarrow A = \bigcup A_n$

Αλλά A συμπαγές και κάθε A_n ανοικτό $\Rightarrow$ υπάρχει

πληροφορία $\Rightarrow$ υπάρχει υποκάλυψη δηλ. $\exists x_1, \dots, x_k : A = \bigcup_{i=1}^k A_{x_i}$

Έστω $A = \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ τότε λόγω του ότι $(A_n) : \uparrow$
 (διότι εάν $v_1 < v_2$ τότε $x \in A_{v_1} \Rightarrow \varphi_{v_1}(x) < \varepsilon \stackrel{v_1 < v_2}{\Rightarrow} \varphi_{v_2}(x) < \varphi_{v_1}(x) < \varepsilon \Rightarrow x \in A_{v_2}$)
 έπεται ότι $A_{\lambda_i} \subseteq A_1 \quad \forall \lambda_i \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ συνεπώς
 $A = \bigcup_{i=1}^k A_{\lambda_i} \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_k = A_1$ οπότε εάν $x \in A \Rightarrow x \in A_1$ ή $x \in A \Rightarrow \varphi_1(x) < \varepsilon$
 Εφόσον, x : τυχαίο στοιχείο του A : $\varphi_1(x) < \varepsilon \quad \forall x \in A$
 Εάν $v \geq 1$ τότε $\forall x \in A$ (εφόσον $\varphi_v : \downarrow$) ισχύει $0 \leq \varphi_v(x) \leq \varphi_1(x) < \varepsilon$
 Οπότε, $\varphi_v(x) = |f_v(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A, \forall v \geq 1$ άρα $f_v \rightarrow f$ οφ/ε

Παρατήρηση

Γενικά όσον αφορά τις ακολουθίες μη συνεχών συναρτήσεων
 το όριο της μπορεί να είναι είτε τη συνεχής συνάρτηση
 είτε η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη είτε όχι!

• Είδαμε ότι η $\|f\| = \sup_{x \in A} |f(x)|$ είναι μια μέτρηση στον $B(A, \mathbb{R})$

Επίσης, $(B(A, \mathbb{R}), \|\cdot\|)$ είναι γραμμικός χώρος του $F(A, \mathbb{R})$

Έστω $H(A, \mathbb{R})$ είναι ένας χώρος του $B(A, \mathbb{R})$ και μια γραμμική

$T: H(A, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ τότε η T λέγεται γραμμικός συναρτησοειδής.

• Θεωρούμε $A = [\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ και $f \in B(A, \mathbb{R})$ η οποία είναι
 ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[\alpha, \beta]$.

Ονομάζουμε το σύνολο αυτών των συναρτήσεων $H(A, \mathbb{R})$.

Το $H(A, \mathbb{R})$ είναι γραμμικός χώρος του $B(A, \mathbb{R})$ διότι εάν
 $f, g \in H(A, \mathbb{R})$ τότε και $f+g \in H(A, \mathbb{R})$ (διότι δε είναι γραμμική
 και ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[\alpha, \beta]$) επιπλέον
 εάν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $f \in H(A, \mathbb{R})$ τότε και $\lambda f \in H(A, \mathbb{R})$.

Η απεικόνιση $T: H(A, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \quad f \mapsto T(f) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ είναι

ένα γραμμικό συναρτησοειδές [διότι $T(f_1 + f_2) = \int_{\alpha}^{\beta} (f_1 + f_2)(x) dx$
 $= \int_{\alpha}^{\beta} f_1(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} f_2(x) dx = T(f_1) + T(f_2)$]

$\uparrow$
 f_1, f_2 ολοκλ.
 κατά Riemann

οποια εάν $\lambda \in \mathbb{R} \quad [T(\lambda f) = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \lambda T(f)]$

Πρόταση

Έστω $\mathcal{H}(A, \mathbb{R})$ γραμμ. υπόχωρος σε $(B(A, \mathbb{R}), \|\cdot\|)$ και
 $T: \mathcal{H}(A, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμ. συναρτησοειδής. Τα ενόφεντα είναι ισοδύναμα:

i) T είναι συνεχής

ii) $(\exists M > 0): |Tf| \leq M \cdot \|f\|, \forall f \in \mathcal{H}(A, \mathbb{R})$

Απόδειξη

Έστω ότι ισχύει η (i) τότε η T είναι συνεχής σε 0, οπότε
δεδόμενος $\varepsilon = 1: (\exists \delta > 0)(\forall f \in \mathcal{H}(A, \mathbb{R})): \|f - 0\| \leq \delta \Rightarrow |T(f) - T(0)| < 1$

Επειδή T είναι γραμμική οπότε $T(0) = 0$ άρα

$(\forall f \in \mathcal{H}(A, \mathbb{R})): \|f\| \leq \delta \Rightarrow |T(f)| < 1$

ο.δ.ο. $|T(f)| \leq \frac{1}{\delta} \cdot \|f\|, \forall f \in \mathcal{H}(A, \mathbb{R})$ (*)

Έστω $f \in \mathcal{H}(A, \mathbb{R})$, τότε

1) Εάν $f = 0$ τότε $|T(f)| = T(0) = 0$ και η (*) ισχύει

2) Εάν $f \neq 0$ τότε θεωρούμε $g = \frac{\delta}{\|f\|} \cdot f$. Ισχύει $\|g\| = \delta \leq \delta$

άρα $|T(g)| < 1$ ή $|T(\frac{\delta}{\|f\|} \cdot f)| < 1$ ή $\frac{\delta}{\|f\|} |T(f)| < 1$ ή

$|T(f)| < \frac{1}{\delta} \|f\|$ Άρα αρκεί $M = 1/\delta > 0$

• Έστω ότι ισχύει η (ii) δηλ $\exists M > 0$ π.ν. $|T(f)| \leq M \|f\|$
 $\forall f \in \mathcal{H}(A, \mathbb{R})$

ο.δ.ο. T είναι συνεχής.

Έστω $\varepsilon > 0$ και $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ τότε εάν $f, g \in \mathcal{H}(A, \mathbb{R})$ με $\|f - g\| \leq \delta$

τότε $|T(f) - T(g)| = |T(f - g)| \leq M \cdot \|f - g\| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$

Άρα T είναι ομοιότ. συνεχής, συνεπώς T : συνεχής.

Λήμμα

Έστω $T: \mathcal{H}(A, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμική. Τα ενόφεντα είναι ισοδύναμα.

i) $(\exists M > 0): |T(f)| \leq M \cdot \|f\|, \forall f \in \mathcal{H}(A, \mathbb{R})$

ii) $(\exists M' > 0): |T(f)| \leq M', \forall f \in \mathcal{H}(A, \mathbb{R})$ με $\|f\| \leq 1$

Απόδειξη

Έστω ότι ισχύει η (i), Έστω επίσης $f \in \mathcal{H}(A, \mathbb{R})$ με $\|f\| \leq 1$
τότε $(\exists M > 0): |T(f)| = M \|f\| \leq M \cdot 1 = M$

ii) $\Rightarrow$ (i) Έστω ότι ισχύει η (ii)

δηλ $\exists M' > 0: |T(f)| \leq M', \forall f \in \mathcal{H}(A, \mathbb{R}), \|f\| \leq 1$

• Έστω λοιπόν $f \in \mathcal{X}(A, \mathbb{R})$ τότε

i) Εάν $f = 0$ έχουμε $|T(f)| = |T(0)| = 0 \leq M' \cdot 0$

ii) Εάν $f \neq 0$ τότε $g = \frac{f}{\|f\|}$ έχουμε $\|g\| = 1 \leq 1$
οπότε $(\exists M') : |T(g)| \leq M'$

ή $|T(\frac{f}{\|f\|})| \leq M' \Rightarrow |T(f)| \leq M' \|f\|$ άρα

αρκεί να πάρω $M = M'$